Modèle GARCH
Application à la prévision de la volatilité

Olivier Roustant

Ecole des Mines de St-Etienne

3A - Finance Quantitative

Objectifs

- Améliorer la modélisation de Black et Scholes des rendements des titres financiers

- Prévoir la volatilité à court terme dans l’univers historique

Modèle de Black et Scholes

- Notations
  - $S_1, \ldots, S_n$: v.a. représentant les cours aux dates 1, 2, …, n
  - $R_1, \ldots, R_n$: v.a. représentant les rendements logarithmiques
    - $R_t = ln(S_t / S_{t-1})$

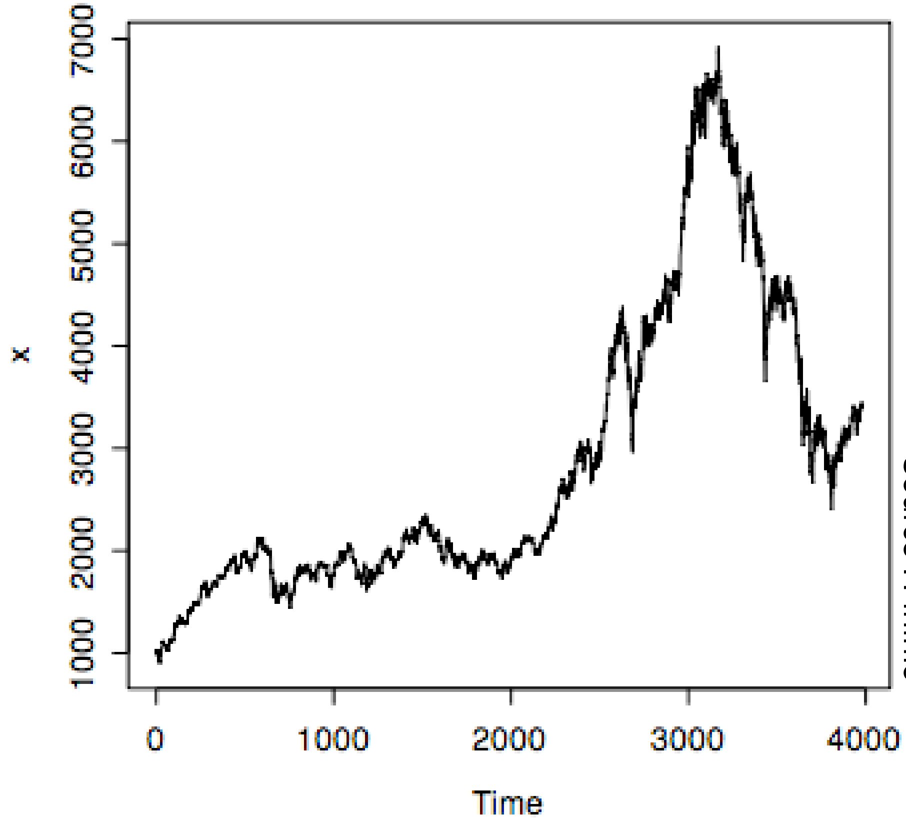
- Modèle de Black et Scholes
  - Dans l'univers historique, $R_1, \ldots, R_n$ sont i.i.d. et de loi $N(m, s^2)$

- Remarque
  - A ne pas confondre avec la formule d'évaluation de Black et Scholes, où tous les calculs se font dans l'univers risque-neutre

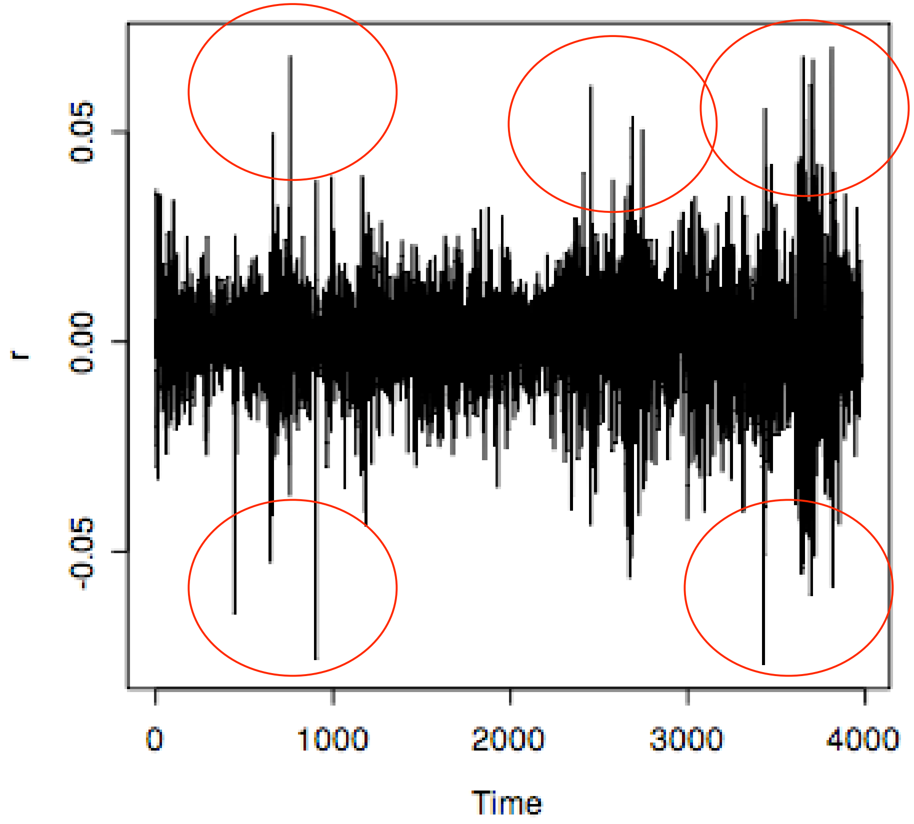
Ecole Nationale Supérieure des Mines SAINT-ETIENNE

Validité du modèle de B&S ?

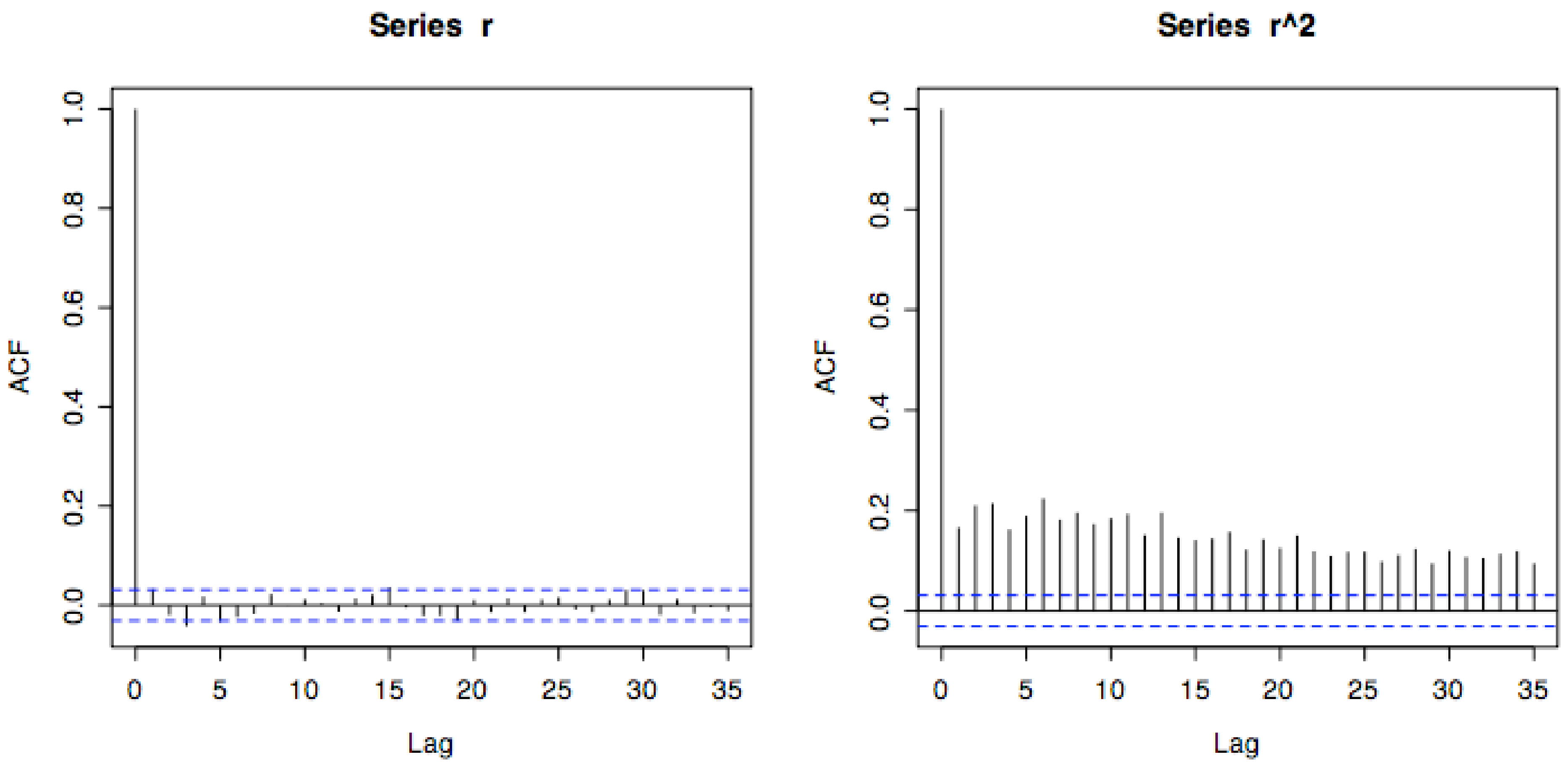
CAC 40 - Données journalières sur une période d'environ 15 ans



Source : Fininfo

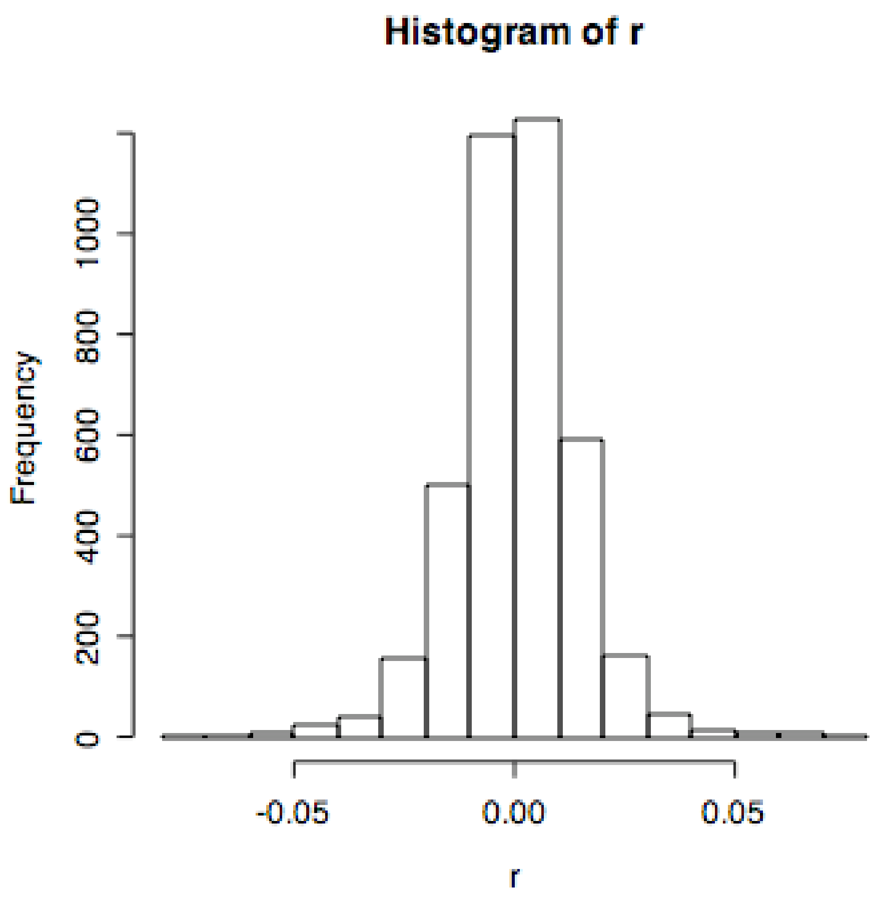


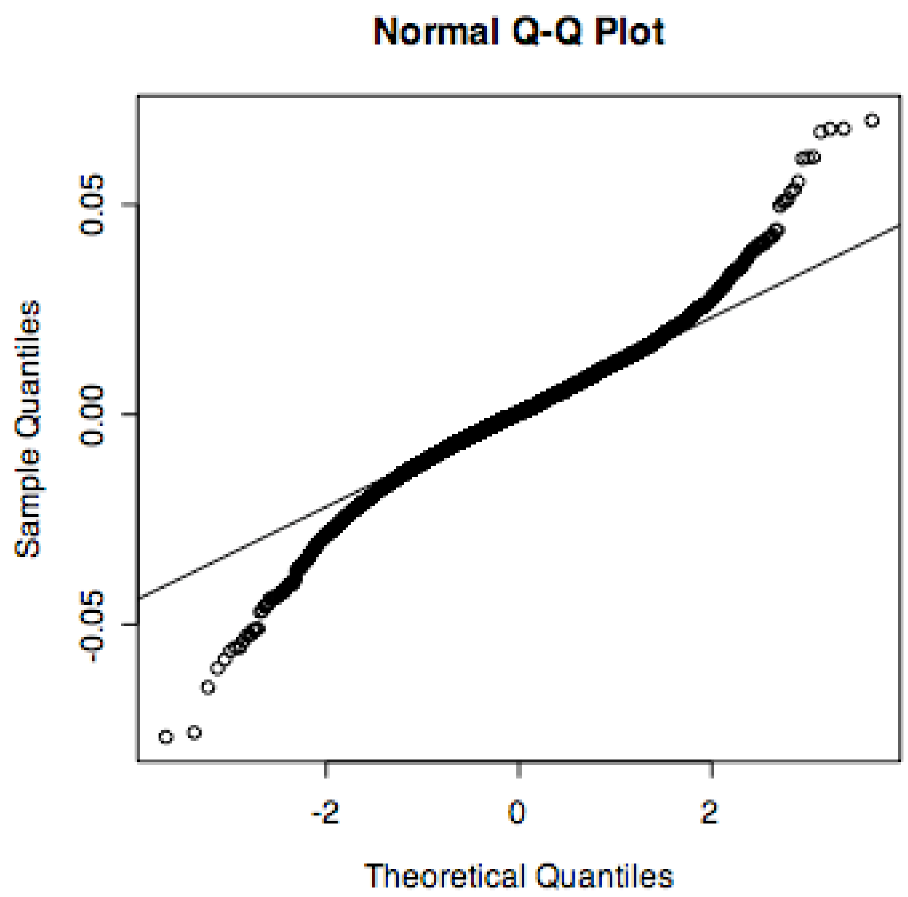
Validité du modèle de B&S
Des défauts d'indépendance



Ecole Nationale Supérieure des Mines SAINT-ETIENNE

Validité du modèle de B&S
Des défauts de normalité





Ecole Nationale Supérieure des Mines SAINT-ETIENNE

Questions de volatilité

- Hypothèse forte du modèle de B&S
  - La volatilité est constante

- Critiques
  - Variations locales
  - La volatilité d’un jour influe sur celle du lendemain en période d’emballement des marchés

    $\Rightarrow$ *volatilité <u>conditionnelle</u> non constante*

Le modèle GARCH
Définition (1/3)

- Modèle GARCH(p,q)

$$R_t = \eta_t \sqrt{h_t}$$

avec

– (η_t) bruit blanc fort gaussien N(0,1)

– $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 R_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_q R_{t-q}^2 + \beta_1 h_{t-1} + \ldots + \beta_p h_{t-p}$

  - $\alpha_0 > 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_q, \beta_1, \ldots \beta_p \geq 0$

– (η_t) et (h_t) sont deux processus indépendants

Le modèle GARCH
Définition (2/3)

- Interprétation
  - (η_t) : correspond aux rendements que l'on obtiendrait par le modèle de Black et Scholes (à 1 cste près)
  - $h_t = \mathrm{var}(R_t \mid \Im_{t-1})$
    - Le modèle décrit une forme simple de dépendance de la variance conditionnelle

- Remarque
  - Le processus GARCH(p,0) n'existe pas
    - On aurait h_t tend vers 0 ou l'infini, impossible dans les 2 cas

Le modèle GARCH
Définition (3/3)

- Signification
  - G : Generalized
  - AR : Auto Regressive
  - CH : Conditional Heteroskedasticity
    - Variance conditionnelle non constante, modélisée par une relation de régression (sur le processus lui-même)
- Origine
  - Engle (1982) : ARCH(q)
  - Bollerslev (1986) : GARCH(p,q)

Le modèle GARCH
Variance globale

- Dans le modèle GARCH, on veut que la variance globale soit constante
  - Important pour pouvoir identifier les paramètres
  - Difficulté conceptuelle :
    - variance globale constante
    - mais variance conditionnelle (« locale ») non constante

- Condition pour que la variance globale soit constante

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_q + \beta_1 + \ldots + \beta_p < 1$$

  - Exercice : le vérifier pour un modèle ARCH(1)

Le modèle GARCH
Propriétés

- Désormais on suppose que la condition de stabilité de la variance globale est vérifiée

- (R_t) est un bruit blanc faible, mais pas fort
  - Il est clair que R_t n'est pas indépendant de R_{t-1}
  - Vérifier que $cov(R_t, R_{t-k}) = 0$ si $k \neq 0$
  - En particulier, le processus est faiblement stationnaire

- (R_t) a une distribution leptokurtique (queues de distribution plus épaisses que pour une loi normale)
  - Lorsque la kurtosis a une valeur finie, on a :
    - $kurtosis(R_t) \geq kurtosis(\eta_t)$

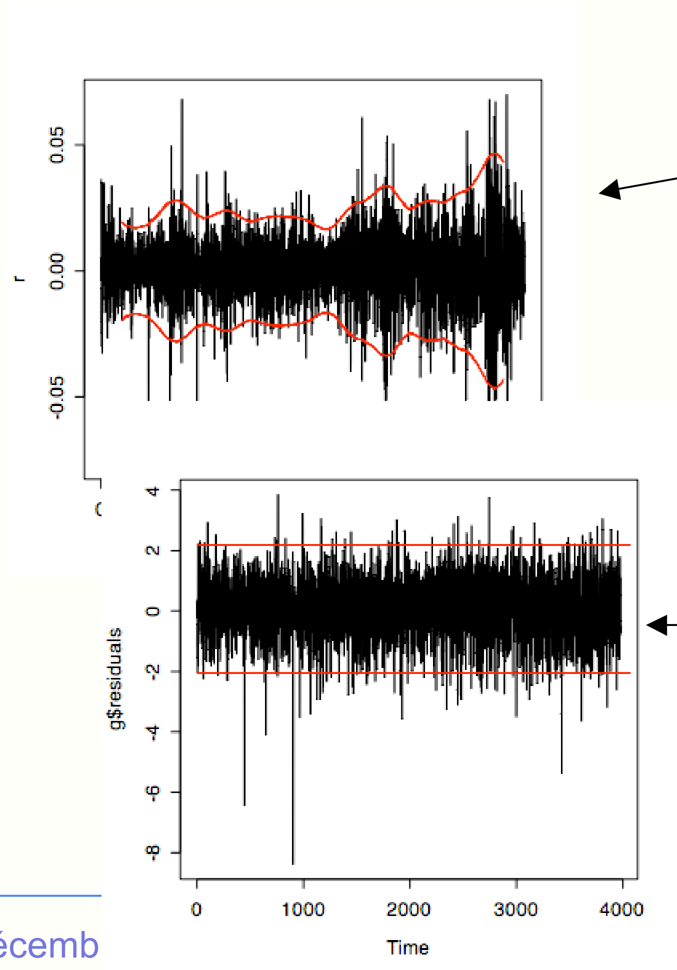
Le modèle GARCH
Exemple d’utilisation avec R© (1/3)

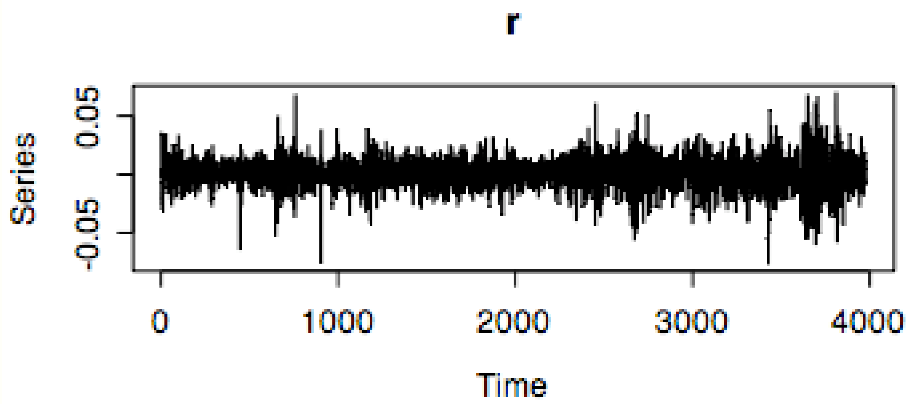
```
> g <- garch(r, order=c(1,1))
> summary(g)     # table d'analyse de variance

…
Coefficient(s):
    Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
a0 4.346e-06   5.035e-07    8.631   <2e-16 ***
a1 8.277e-02   7.716e-03   10.727   <2e-16 ***
b1 8.929e-01   9.222e-03   96.827   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

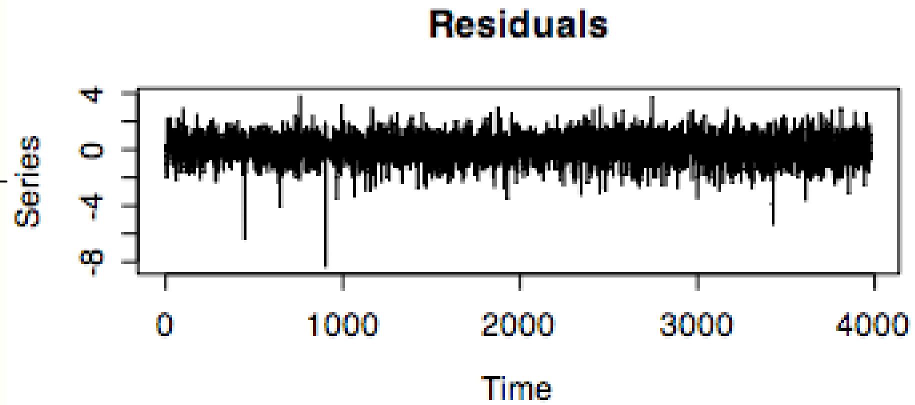
- A vérifier : positivité des coefficients, condition de stationnarité
  - Tenir compte de l’erreur d’estimation

Le modèle GARCH
Exemple d’utilisation avec R© (2/3)

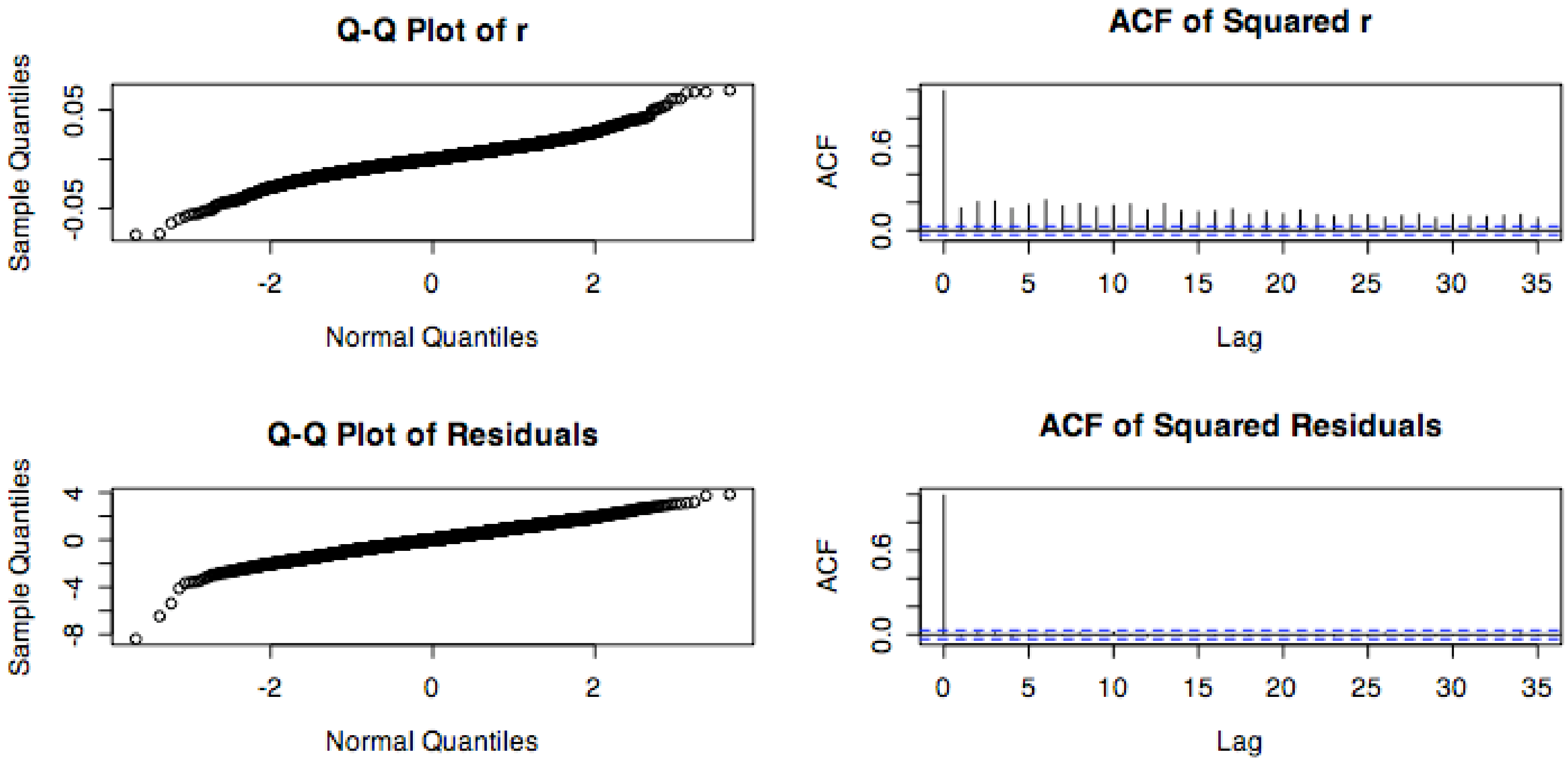
> plot(g)   # validation







Le modèle GARCH
Exemple d'utilisation avec R© (3/3)



Application à la prévision

- Connaissant l'information $\Im_t$ apportée par les rendements jusqu'à *t*, comment prévoir R_{t+k}?
  - On cherche la loi de R_{t+k} conditionnellement à $\Im_t$
    - a minima, $E(R_{t+k} \mid \Im_t)$ et $var(R_{t+k} \mid \Im_t)$

- Propriété : $\forall k \geq 1$, $E(R_{t+k} \mid \Im_t) = 0$
  - Autrement dit, que ce soit avec B&S ou GARCH, la prévision des rendements est la valeur moyenne
  - L'apport de GARCH est dans la prévision du <u>risque</u>
    - $var(R_{t+k} \mid \Im_t)$

Prévision de la volatilité

- Black et Scholes : $\forall k \geq 1, \; var(R_{t+k} \mid \Im_t) = \sigma^2$

- GARCH - Ex. 1 : ARCH(1)

  $\forall k \geq 1, \quad var(R_{t+k} \mid \Im_t) = \alpha_1^{k-1} h_{t+1} + (1 - \alpha_1^{k-1})\sigma^2$

- GARCH - Ex. 2 : GARCH(1,1)

  $\forall k \geq 1, \quad var(R_{t+k} \mid \Im_t) = (\alpha_1+\beta_1)^{k-1} h_{t+1} + (1 - (\alpha_1+\beta_1)^{k-1})\sigma^2$

- <u>Interprétation</u>
  - Moyenne de la variance globale σ^2 et de la variance conditionnelle h_{t+1} , pondérée par les paramètres du modèle GARCH

Prévision de la volatilité
Cas de l'horizon 1

- Propriété
  - La loi de $R_{t+1} \mid \Im_t$ est $N(0, h_{t+1})$

- Application
  - $P(R_{t+1} \in [-2\sqrt{h_{t+1}}\ ,\ 2\sqrt{h_{t+1}}] \mid \Im_t) = 95\%$
  - $[-2\sqrt{h_{t+1}}\ ,\ 2\sqrt{h_{t+1}}]$ est un intervalle de prévision à 95%

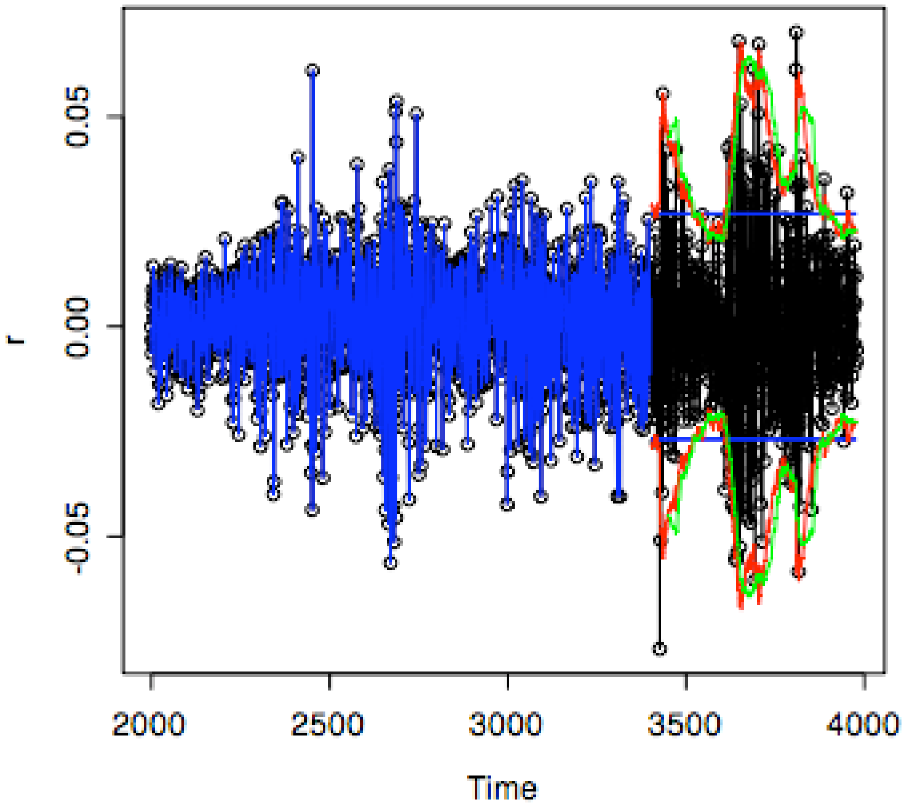
- Remarque
  - Pour $k \geq 2$, la loi de $R_{t+k} \mid \Im_t$ n'est pas normale en général

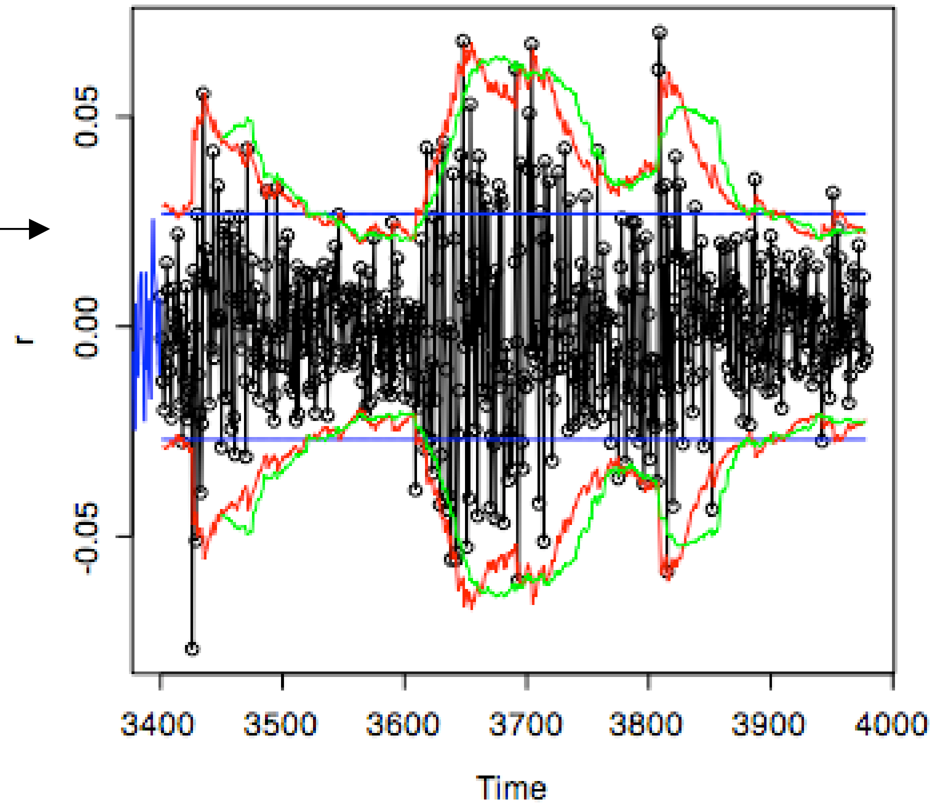
Prévision de la volatilité
Exemple (1/3)

- Découpage des données
  - Période d'apprentissage, période test
  - Estimation (statique) sur l'ensemble d'apprentissage

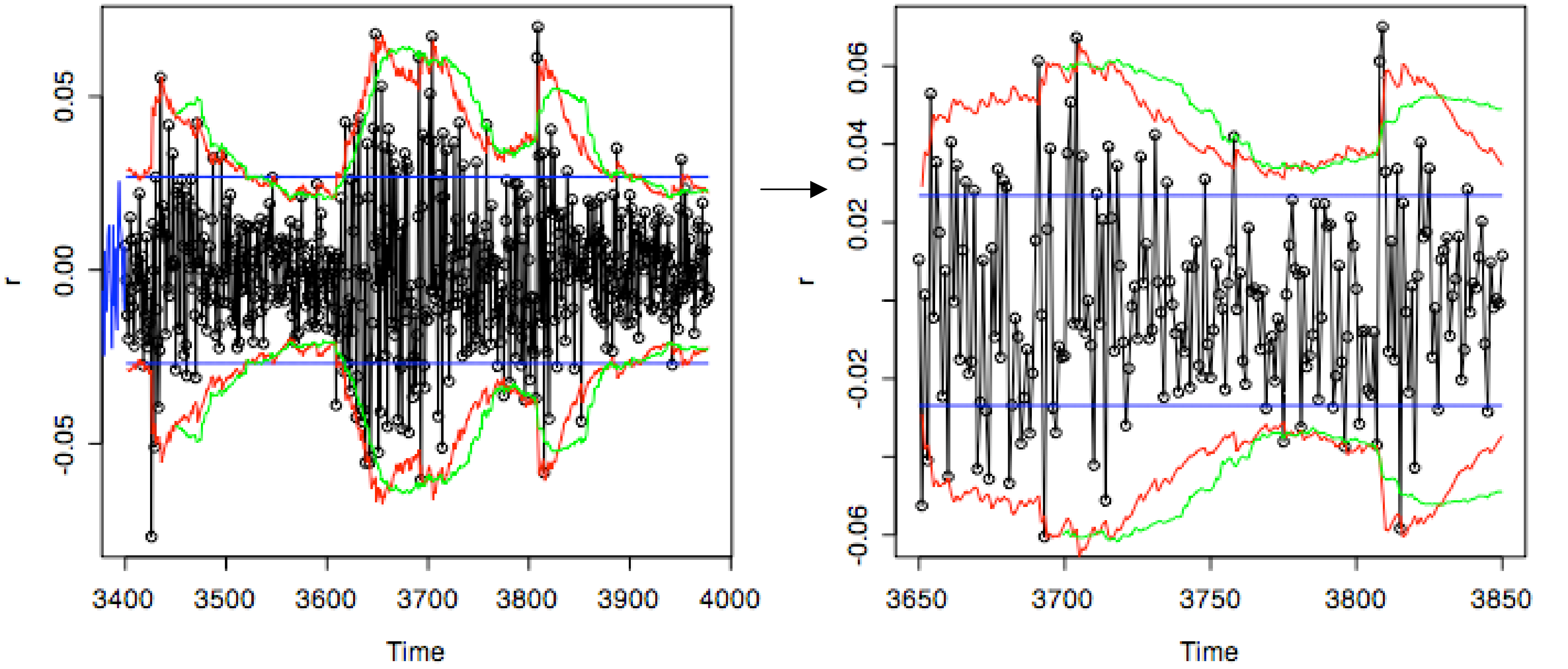
- Pour toute date dans la période test, prévision de la volatilité du lendemain
  - Rep. des intervalles de confiance à 95% (en rouge)
  - Comparaison avec les intervalles de B&S
    - Volatilité globale (en bleu)
    - Volatilité glissante estimée sur 50 jours (en vert)

Prévision de la volatilité
Exemple (2/3)





Prévision de la volatilité
Exemple (3/3)



Conclusion

- Avantages du modèle GARCH
  - Plus réaliste que B&S :
    - Volatilité conditionnelle non constante
    - Bruit blanc faible, mais pas fort
    - Leptokurticité de la distribution des rendements
  - Prévisions de la volatilité beaucoup plus réactives

- Défauts souvent constatés
  - Modèle en limite de stationnarité
    - On a souvent $\alpha_1+\beta_1 \approx 1$ pour GARCH(1,1)
  - Les résidus ne sont pas toujours de loi normale

Pour aller plus loin

- Bollerslev T. (1986), Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 31, 307-327
- Engle R.F. (1982), Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation, *Econometrica*, 50, 987-1008
- Gouriéroux C. (1997), *ARCH Models and Financial Applications*, Springer
- Hull J.C. (2005), *Options, Futures, and Other Derivatives, Sixth Edition*, Prentice Hall,
  - http://www.rotman.utoronto.ca/~hull/
  - Possibilité de télécharger les transparents (chapitre 19, 6ème édition)