Ecole des Mines de Saint-Etienne

# M A R T I N G A L E S

Support de Cours

Janvier 2009 – Olivier Roustant

# 1. INTRODUCTION

Une martingale est un processus aléatoire qui ne possède pas de partie prévisible relativement à l'information dont on dispose. La théorie des martingales a eu de grandes répercussions dans de nombreux champs d'application, en probabilité bien sûr, mais aussi pour la résolution numérique des équations aux dérivées partielles (voir l'UP « théorie du potentiel, EDP), en assurance (théorie de la ruine) et en finance. Dans cette dernière discipline, on montre que sous des hypothèses raisonnables de fonctionnement du marché, et à condition de se placer dans un espace de probabilité « risque-neutre » (au lieu de l'espace de probabilité historique, défini par les historiques des cours), les prix actualisés des produits financiers sont des martingales. L'idée sous-jacente est que dans un marché idéal, si une partie du prix était prévisible, cela serait tout de suite détecté par les acteurs du marché et très rapidement le prix serait modifié de façon à être à nouveau imprévisible. Pour plus de précisions, attendre le 2$^{\text{ème}}$ module !

# 2. DEFINITION – GENERALITES

## 2.1. FILTRATION

**Définition.**
Une filtration d'un espace probabilisé $(\Omega,\Im,P)$ est un ensemble $(\Im_t)_{t\geq 0}$ de sous-tribus de $\Im$, croissantes pour l'inclusion :

$$\forall s,t \geq 0, \text{ si } s\leq t \text{ alors } \Im_s \subseteq \Im_t$$

**Interprétation. Filtration naturelle.**

- La filtration est un formalisme probabiliste pour décrire l'information dont on dispose. La dernière propriété traduit simplement que l'information augmente au cours du temps.
- Pour un processus aléatoire $X = (X_t)_{t\geq 0}$, il y a une filtration naturelle, constituée des sous-tribus engendrées par les variables aléatoires $X_s$, $s\leq t$ : $\Im_t = \sigma(X_s, s\leq t)$.

## 2.2. MARTINGALE, SOUS-MARTINGALE, SUR-MARTINGALE

**Définitions**
Soit $(\Omega,\Im,P)$ un espace probabilisé, $(\Im_t)_{t\geq 0}$ une filtration et $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus aléatoire adapté pour cette filtration, i.e. tel que pour tout $t\geq 0$, $X_t$ est $\Im_t$-mesurable. Supposons en plus que chaque $X_t$ est intégrable, i.e. $E(|X_t|)<\infty$. On dit que X est une $\Im$-martingale (resp. sous-martingale, resp. sur-martingale) si pour tous t et h $\geq 0$, on a avec probabilité 1:

Martingale : $X_t = E(X_{t+h}|\Im_t)$
Sous-martingale : $X_t \leq E(X_{t+h}|\Im_t)$
Sur-martingale : $X_t \geq E(X_{t+h}|\Im_t)$

*Remarque.* Lorsqu'elle n'est pas précisée, on utilise la filtration naturelle et on dit simplement que X est une martingale.

**Interprétation dans le contexte d'un jeu d'argent.**

- Une martingale est un jeu equilibré : on ne peut espérer ni perdre ni gagner.
- Une sous-martingale (resp. sur-martingale) est un jeu avantageux (resp. désavantageux).

### 2.3. PREMIERS EXEMPLES

- En temps discret. Jeu de pile ou face : on gagne ou on perd sa mise avec probabilité p. Le gain du joueur est une martingale si $p = ½$, une sous-martingale si $p > ½$, et une sur-martingale si $p < ½$.
- En temps continu. Le mouvement brownien standard est une martingale. Le mouvement brownien avec dérive linéaire $(\mu t+W_t)_{t\geq 0}$ est une sous-martingale si la dérive est croissante ($\mu\geq 0$), et une sur-martingale si la dérive est décroissante ($\mu\leq 0$).
- Soit Z une variable aléatoire intégrable, et $(\Im_t)_{t\geq 0}$ une filtration. Le processus des prévisions successives $(E(Z|\Im_t))_{t\geq 0}$ est une martingale.

### 2.4. PREMIERES PROPRIETES

- Une martingale est constante en moyenne, c'est-à-dire que $t \to E(X_t)$ est constante ; une sous-martingale est croissante en moyenne, une sur-martingale décroissante.
- Si X est une martingale et $\phi$ une fonction convexe (resp. concave), alors $\phi(X)$ est une sous-martingale (resp. sur-martingale).

*La suite de la théorie sera exposée dans le cadre discret. Les idées générales restent valables en continu, mais les hypothèses d'application sont un peu plus techniques. Le lecteur intéressé pourra consulter [Karatzas, Shreve] ou [Revuz, Yor].*

## 3. PROCESSUS PREVISIBLES ET TRANSFORMEE DE MARTINGALE

Si dans un jeu de hasard, on multiplie son gain par une quantité positive éventuellement aléatoire mais dépendante uniquement du passé (au sens strict), l'équilibre du jeu n'est pas modifié : s'il était équilibré ou s'il était avantageux à l'une des parties, il le restera. Dit autrement, la transformée d'une (sous-, sur-) martingale par un processus prévisible est une (sous-, sur-) martingale. C'est le résultat essentiel de cette section, qui est un résultat clé pour la construction de l'intégrale stochastique, la transformée d'une martingale étant l'équivalent discret de l'intégrale stochastique.

**Définitions (Processus prévisibles – Transformée de martingale)**
Soit $(\Im_n)_{n\in N}$ une filtration sur un espace probabilisé $(\Omega,\Im,P)$ et C un processus aléatoire.

- On dit que C est prévisible si pour tout n, $C_n \in \Im_{n-1}$
- Soit X une $\Im$-martingale. La transformée de X par C est le processus $C\bullet X$ défini par :

$$(C\bullet X)_0 = 0$$
$$(C\bullet X)_n = C_1(X_1 - X_0) + \dots + C_n(X_n - X_{n-1})$$

**Proposition**
Soit C un processus prévisible et X une martingale. Si l'une des hypothèses suivantes est satisfaite,

(i) C est borné : $\exists K>0$ t.q. $|C_n(\omega)|\leq K,\ \forall(n, \omega)$
(ii) Pour tout n, $C_n$ et $X_n$ sont de carré intégrable

alors $C\bullet X$ est une martingale.
En rajoutant la condition que C est à valeurs positives, le résultat est valable en remplaçant partout martingale par sous-martingale (resp. sur-martingale).

*Preuve*. Immédiat.

# 4. LES THEOREMES D'ARRET

Il y a en fait un seul véritable théorème d'arrêt, connu sous le nom d'*Optional Sampling Theorem*, mais plusieurs résultats liés à l'échantillonnage aléatoire des (sous-, sur-) martingales. Dans sa version originelle, le théorème d'arrêt traduit le fait que si un jeu est équilibré ou au contraire favorable à l'une des parties, cette propriété reste valable si l'on échantillonne (sampling) le processus à des instants aléatoires, pour peu que ces instants soient choisis de façon non anticipative (optional time).

Dans un premier temps, précisons la notion d'échantillonnage aléatoire non anticipatif, plus communément appelé *temps d'arrêt* (*optional time* ou *stopping time*, ces deux notions étant différentes en temps continu).

**Définitions (temps d'arrêt – tribu associée)**

Soit $(\mathfrak{I}_n)_{n\in Z}$ une filtration sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathfrak{I},P)$ et T une variable aléatoire de $\Omega$ dans $\{0, 1, 2\ldots ; +\infty\}$. [T peut donc prendre des valeurs infinies].

- On dit que T est un temps d'arrêt si pour tout entier n, $\{T \le n\}\in \mathfrak{I}_n$.
- Dans ce cas, l'ensemble $\{A\in \mathfrak{I},\ A\cap\{T\le n\}\in \mathfrak{I}_n,\ \forall n\}$ est une sous-tribu de $\mathfrak{I}$ notée $\mathfrak{I}_T$.

**Interprétation. Exemples et contre-exemples.**

La définition d'un temps d'arrêt traduit que le choix de l'instant aléatoire $T(\omega)$ dépend seulement du passé (au sens large : incluant le présent).

*Exemple.* Le premier instant où l'on obtient pile dans le jeu de pile ou face.

*Contre-exemple*. Le dernier instant sur 10 parties où l'on a obtenu pile.

**Théorème 1 - Optional Sampling Theorem (Doob) [avec 2 temps d'arrêt]**

Soit X une $\mathfrak{I}$-martingale, et soient S et T deux temps d'arrêts <u>bornés</u> avec $S \le T$.

Alors $X_S$ et $X_T$ sont intégrables et on a avec probabilité 1 :

$$X_S = E(X_T|\mathfrak{I}_S)$$

Si X est une sous-martingale (resp. sur-martingale), l'égalité est remplacée par $\le$ (resp. $\ge$).

*Preuve*. Voir [Doob].

En pratique, on utilise souvent un corollaire utilisant un seul temps d'arrêt : $E(X_T) = E(X_0)$. Ce dernier résultat est valable sous d'autres hypothèses, ce qui constitue la deuxième version du théorème :

**Théorème 2 [avec un seul temps d'arrêt]**

Soit X une martingale et T un temps d'arrêt. Si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

(i) T est borné.

(ii) T est fini avec probabilité 1 et X est borné : $\exists K>0$ t.q. $|X_n(\omega)|\le K,\ \forall(n, \omega)$

(iii) T est intégrable et les incréments de X sont bornés: $\exists K>0$ t.q. $|X_n(\omega)-X_{n-1}(\omega)|\le K,\ \forall(n,\omega)$

Alors

$$E(X_T) = E(X_0)$$

Si X est une sous-martingale (resp, sur-martingale), l'égalité est remplacée par $\le$ (resp. $\ge$).

Ce théorème découle simplement du résultat suivant, qui traduit l'invariance des processus de type martingale par un échantillonnage aléatoire de type temps d'arrêt :

**Théorème 3 (martingales arrêtées)**
Soit X une martingale et T un temps d'arrêt. Alors le processus arrêté $X^T = (X_{T\wedge n})_{n\in Z}$ est une martingale. En particulier $E(X_0) = E(X_{T\wedge n})$, $\forall$n.
Le résultat est valable en remplaçant partout martingale par sous-martingale (resp. sur-martingale) et l'égalité par $\leq$ (resp. $\geq$).

*Preuve.* Il suffit de remarquer que $X_{T\wedge n} - X_0$ est la transformée de X par le processus prévisible $C = (1_{n\leq T})_{n\in N^*}$

*Remarque*. Ce théorème est valable en temps continu avec la définition du temps d'arrêt suivante : T est un temps d'arrêt si $\{T\leq t\}\in\Im_t$, $\forall$t.

*Avertissement*. Les hypothèses du théorème 2 ne sont pas à négliger. Considérer par exemple une marche aléatoire sur Z, démarrant en 0. Soit T le premier temps d'atteinte de la position n=1. On peut montrer que T est fini avec probabilité 1. Que donnerait le théorème 2 si on omettait de vérifier les hypothèses ?

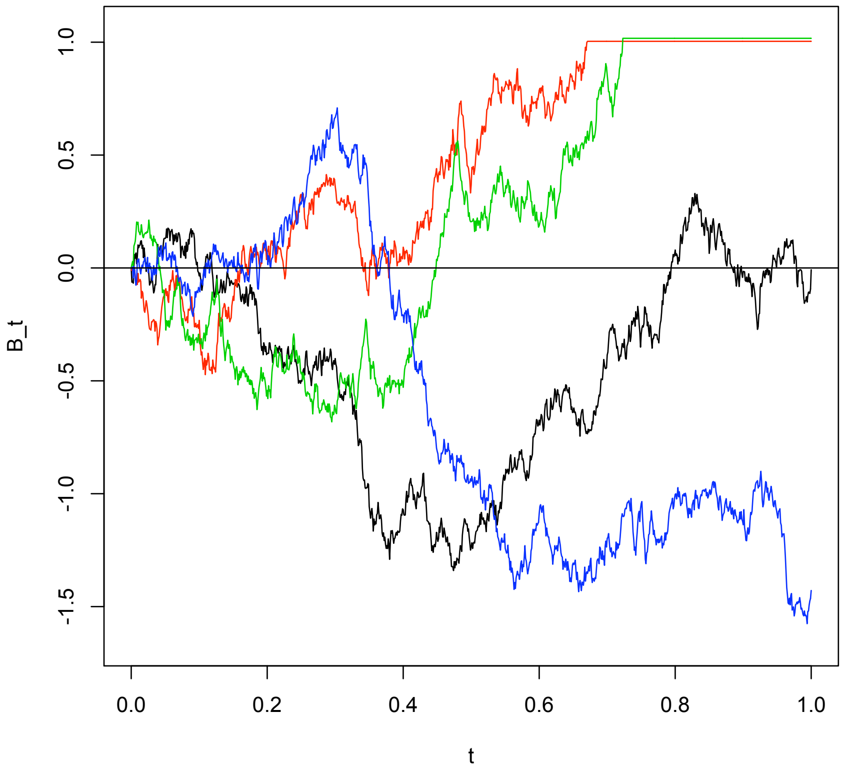


**Figure 1. Quelques trajectoires de la martingale arrêtée $X^T$, avec X le mouvement brownien standard, et $T = \inf\{t \geq 0, X_t \geq 1\}$.**

## 5. LA DECOMPOSITION DE DOOB

Tout processus adapté intégrable s'écrit comme la somme d'une partie prévisible et d'une partie imprévisible (martingale). C'est le théorème de décomposition de Doob.

**Théorème (Doob)**
(a) Soit $X = (X_n)_{n\in Z}$ un processus aléatoire adapté avec $X_n \in L^1$ pour tout $n\in Z$.
Alors X admet la décomposition

$$X = X_0 + M + A$$

où M est une martingale nulle en 0, et A est un processus prévisible nul en 0. En outre la décomposition est unique au sens où si $X = X_0 + M' + A'$ est une autre décomposition, alors $M=M'$ et $A=A'$ avec probabilité 1.
(b) X est une sous-martingale si et seulement si le processus A est croissant (avec probabilité 1, on a : $\forall n\in Z$, $A_n \leq A_{n+1}$). X est une sur-martingale si et seulement si A est décroissant.

La démonstration ne présente pas de difficulté, et laissée en exercice (voir fin du document). La décomposition de Doob se généralise au temps continu, moyennant une plus grande complexité technique et des hypothèses plus fines. Elle est alors dénommée *décomposition de Doob-Meyer* (voir [Karatzas et Shreve]). Cette décomposition apparaît de façon essentielle dans le calcul stochastique (voir par exemple la définition des semi-martingales et la formule d'Itô).

## 6. LE THEOREME DE CONVERGENCE DES MARTINGALES

Les sous-martingales et les sur-martingales sont les généralisations aux processus des suites monotones. Si l'on impose que ces processus soient bornés, il est alors tout à fait naturel qu'ils convergent. L'énoncé du théorème est le suivant :

**Théorème (Doob)**
Soit X une sur-martingale bornée, i.e. $\sup E(|X_n|) < \infty$.
Alors $X_n$ converge presque sûrement vers une limite finie.

La démonstration est très élégante, on la trouvera bien sûr dans [Doob] mais aussi dans [Williams], où le graphique clé est représenté. Il existe également un théorème de convergence 'Backward' où l'on fait tendre n vers $-\infty$ (voir [Doob]).

*Remarque.* Le résultat est également valable pour une sous-martingale (changer X en $-X$), et pour une martingale (c'est aussi une sur-martingale).

## Bibliographie

Doob J.L. (1994), *Measure Theory*, Springer-Verlag.

Karatzas I., Shreve S. E. (1991), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd edition, Springer.

Revuz D., Yor M. (1999), *Continuous Martingales and Brownian Motion*, 3rd edition, Springer.

Roger P. (2004), *Probabilités, statistique et processus stochastiques*, Collection synthex, Pearson Education.

Williams D. (1991), *Probability with Martingales*, Cambridge Mathematical Textbooks.