Ecole des Mines de Saint-Etienne

PROCESSUS ALEATOIRES :

MARTINGALES, MOUVEMENT BROWNIEN, CALCUL STOCHASTIQUE

Exercices

Janvier 2009 – Olivier Roustant

MOUVEMENT BROWNIEN

1) Montrer l'équivalence entre les 2 propriétés suivantes pour un processus B :

   a) B est un processus à accroissements indépendants et stationnaires (PAIS), et pour tout t, B_t est de loi normale N(0,t)
   b) B est un processus gaussien centré, avec cov(B_s, B_t) = min(s,t)

   Que faut-il rajouter pour que B soit un mouvement brownien ?

2) Soit $B = (B_t)_{0\leq t\leq 1}$ un mouvement brownien standard sur [0, 1] (on s'arrête à 1). Montrer que le processus $X = (B_{1-t} - B_1)_{0\leq t\leq 1}$ est aussi un mouvement brownien standard sur [0, 1]. Faire un dessin.

3) On appelle *pont brownien* le processus $(P_t)_{0\leq t\leq 1}$ obtenu à partir du mouvement brownien standard en imposant les contraintes d'interpolation $P_0 = P_1 = 0$.
   Formellement, si $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard, on a :

$$P_t = B_t - tB_1, \quad 0\leq t\leq 1$$

   Montrer que (P_t) est un processus gaussien centré et calculer sa structure de covariance. En déduire des bandes de confiance à 95%. Interpréter.

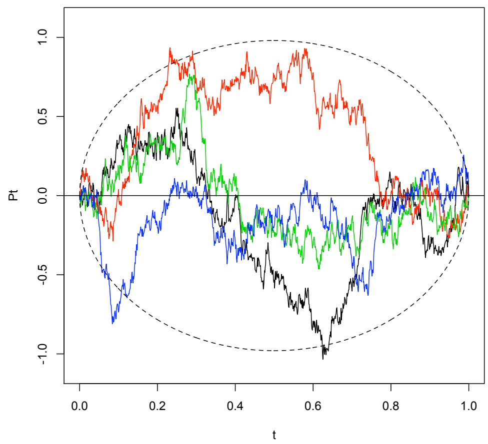

Figure 1. Quelques trajectoires du pont brownien et les bandes de confiance à 95%.

4) Soient $B = (B^1, B^2)$ un mouvement brownien bi-dimensionnel standard, c'est-à-dire tel que B^1 et B^2 sont deux mouvements browniens standard <u>indépendants</u>.
   Montrer que B est invariant par rotation en loi, c'est-à-dire que pour tout $\theta\in[0,2\pi]$, le processus W défini par $W_t = R_\theta B_t$ est un mouvement brownien bi-dimensionnel standard, avec R_θ la matrice ($\cos(\theta)$ $\sin(\theta)$; $-\sin(\theta)$ $\cos(\theta)$).

VARIATION QUADRATIQUE - COVARIATION

1) Soient X et Y deux processus à trajectoires de classes C^1.
   a. Montrer que $< X >_t = < Y >_t = 0$, puis que $< X , Y >_t = 0$ $(\forall t)$.
   b. Montrer que $< X , Z >_t = 0$, pour tout processus Z tel que $< Z >_t < +\infty$ $(\forall t)$.

2) Soit B un mouvement brownien standard. On rappelle que $< B >_t = t$, $\forall t$.
   a. Soit X un processus à trajectoires de classes C^1. Calculer $< X , B>_t$
   b. Soit W un mouvement brownien avec dérive $W_t = \mu t + B_t$. Calculer $< W >_t$

3) On reprend les notations de l'exercice 3) de la section « Mouvement brownien ».
   a. Montrer que $< B^1, B^2 >_t = 0$.
   b. Exprimer $< B^1, W^1 >_t$ en fonction de $cor(B^1_t, W^1_t)$.

MARTINGALES

1) Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard. Montrer que :
   a. $(W_t^2)_{t\geq 0}$ est une sous-martingale, et $(W_t^2 - t)_{t\geq 0}$ est une martingale.
   b. $(\exp(W_t))_{t\geq 0}$ est une sous-martingale, et $(\exp(\alpha W_t - \frac{1}{2}\alpha^2 \times t))_{t\geq 0}$ est une martingale pour tout réel α.

2) [*Gestion de portefeuille et martingale*]
   On considère K actifs financiers, dont les prix à la date *t* sont notés $(X^1_t, ..., X^K_t)$. On suppose que chaque processus (X^k) est une *martingale* $(1 \leq k \leq K)$.
   Notons $\theta_t = (\theta^1_t, ..., \theta^K_t)$ le nombre de parts détenu dans chaque actif entre t et t-1. La valeur du portefeuille est alors $V_t = \theta^1_t X^1_t + ... + \theta^K_t X^K_t$. On suppose naturellement (pourquoi ?) que θ est un processus *prévisible* borné.

   On dit que le portefeuille est *autofinancé* si :

$$\theta^1_t X^1_t + ... + \theta^K_t X^K_t = \theta^1_{t+1} X^1_t + ... + \theta^K_{t+1} X^K_t$$

   a. Interpréter cette égalité (prendre un exemple simple).
   b. Montrer que si le portefeuille est autofinancé, alors V est une martingale. Interpréter ce résultat en terme de gestion de portefeuille.

3) *[Sur la ruine du joueur]*.
   On considère le jeu de pile ou face équilibré (p=1/2), et on se pose la question suivante : quelle est la probabilité pour que le joueur réalise une perte supérieure à une quantité $b > 0$ (ruine) avant d'avoir réalisé un bénéfice supérieur ou égal à $a > 0$?

   On note $X_1, ..., X_n$ le bénéfice réalisé à chaque partie, éventuellement négatif, et $S_n = X_1 + ... + X_n$. Soit $T = \inf\{n \in N, S_n \geq a \text{ ou } S_n \leq -b\}$, et p_{ruine} la probabilité cherchée. Dans la suite, on prend a et b entiers.

a. Montrer que T est un temps d'arrêt, et exprimer p_{ruine} en fonction de T.
b. On admet que T est fini, i.e. $P(T<+\infty)=1$ (voir par ex. [Williams] pour une démonstration de ce résultat, utilisant aussi le th. d'arrêt). En déduire que $p_{ruine} = a/(a+b)$, par application du théorème d'arrêt de Doob (*Indication : utiliser le théorème 3, puis le théorème de convergence dominée de Lebesgue*). Interpréter. Calculer p_{ruine} si a et b ne sont pas entiers.
c. Que faut-il modifier pour calculer la probabilité de ruine en temps continu, donc si (S_t) est le mouvement brownien standard ?

4) *[Sur la décomposition de Doob]*.
   a. Démontrer le théorème de décomposition de Doob. Justifier l'interprétation de M comme l'erreur de prévision cumulée, et A comme l'espérance de gain cumulée.
   b. Donner la décomposition de Doob pour le jeu de pile ou face.
   c. Donner la décomposition de Doob d'un processus AR(1) : $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$, avec (ε_t) un bruit blanc centré.

5) *[Loi du premier temps d'atteinte d'une barrière par un mouvement brownien]*.
Dans cet exercice, on va calculer de 2 façons la loi du premier temps d'atteinte d'une barrière d'un mouvement brownien standard B :

$$T_a = \inf\{t>0,\ B_t = a\}, \quad a>0$$

Pour cela, on va calculer la transformée de Laplace de T_a : $E[\exp(-\lambda T_a)]$, qui pourra ensuite être inversée.

   a. Justifier que $T_a = \inf\{t>0,\ B_t \geq a\}$ et que T_a est un temps d'arrêt.
   b. On rappelle que les trajectoires du Brownien sont presque sûrement non bornées. Qu'en déduire pour T_a ?
   c. Soit $s\geq 0$. Posons $M_t^s = \exp(sB_t - s^2t/2)$. Montrer que $E[M_{T_a \wedge t}]=1$ (indication : utiliser l'exercice 1). En déduire que $E[M_{T_a}]=1$, puis $E[\exp(-\lambda T_a)] = \exp(-a(2\lambda)^{1/2})$.

Par inversion de la transformée de Laplace, on montre que T_a admet la densité de probabilité :

$$f_a(t)=a(2\pi t^3)^{-1/2} \exp(-a^2/2t)$$

On peut retrouver ce résultat grâce au fameux « principe de réflexion ».

   d. Justifier grâce à un argument de symétrie que $P(T_a \leq t) = 2P(B_t \geq a)$, $\forall t, a>0$.
   e. Retrouver alors la densité de T_a.

CALCUL STOCHASTIQUE

1) [*Formule d'intégration par parties*]
Dans cet exercice, on s'intéresse à la formule d'intégration par parties pour des semi-martingales-continues :

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + < X,Y >_t$$

   a. Démonstration élémentaire. Démontrer la formule dans le cas particulier où X=Y, en utilisant simplement une subdivision dyadique. Expliquer comment on peut en déduire le résultat dans le cas général.
   b. Retrouver la formule d'intégration par parties en utilisant le calcul d'Itô.

   c. Soit ϕ une fonction de classe C^1. Justifier que ϕ est une semi-martingale continue (déterministe). En déduire la formule d'intégration par partie valable pour une semi-martingale et une fonction de classe C^1 :

$$\int_0^t \phi(s) dX_s = [X\phi]_0^t - \int_0^t X_s \phi'(s) ds$$

   Observer l'analogie avec la formule d'intégration par parties ordinaire.

2) [*Processus d'Ornstein-Uhlenbeck*]
Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est la solution unique de l'équation :

$$\begin{cases} dX_t = -cX_t dt + \sigma dW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

avec W un mouvement brownien standard, *$c > 0$, $\sigma \geq 0$* deux constantes et x un nombre réel quelconque. Il s'agit donc d'une équation différentielle avec un terme d'erreur modélisé par un mouvement brownien. En finance, il est utilisé pour décrire la dynamique des taux d'intérêt.

   a. Résoudre le problème dans le cas déterministe ($\sigma = 0$).
   b. En utilisant $Y_t = X_t e^{ct}$, montrer que X_t vérifie :

$$X_t = xe^{-ct} + \sigma e^{-ct} \int_0^t e^{cs} dW_s$$

   c. Montrer que pour tout t, X_t est de loi normale $N\left(xe^{-ct}, \sigma^2 \frac{1-e^{-2ct}}{2c}\right)$. Plus généralement, montrer que X est un processus gaussien et vérifier que $\mathrm{cov}(X_s, X_t) = \sigma^2 \frac{e^{-c|s-t|} - e^{-c(s+t)}}{2c}$. Les trajectoires de X sont-elles continues ?
   d. Justifier la terminologie de « processus de retour à la moyenne », qui est utilisée pour le processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Interpréter le paramètre c.

3) [*Mouvement brownien intégré - Application à l'évaluation d'une option asiatique]*
Une option asiatique est une option dont le payoff dépend d'une moyenne du prix de l'actif sous-jacent. Dans cet exercice on considère le cas d'une moyenne géométrique, et on va donner le principe du calcul du prix de l'option d'achat asiatique sur une action. Le payoff de cette option est :

max(G(T)-K ; 0)

avec K le prix d'exercice et G(T) = $\exp\left(\frac{1}{T-t_0}\int_{t_0}^{T}\ln(S_t)dt\right)$ où :

- t_0 est la date initiale, T est l'échéance (ou maturité).
- S_t le prix à la date t du sous-jacent.

Vous verrez au module 2 que sous diverses hypothèses, dont celui de l'existence d'un taux sans risque *r*, la valeur de l'option est donnée par la formule suivante:

$$C(t_0,T) = e^{-r(T-t_0)}E_Q[\max(G(T)-K;0)]$$

où *Q* est une probabilité sous laquelle l'espérance actualisée du rendement de tous les actifs est égale au taux sans risque (probabilité risque-neutre).

On suppose que le cours du sous-jacent est donné par le modèle de Black et Scholes :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

avec B un mouvement brownien standard. On montre alors (voir polycopié, § 6) que dans l'espace de probabilité risque-neutre, le cours de l'actif est donné par :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

où W est un autre mouvement brownien standard. Il en résulte (cf polycopié §5.2) que pour tout t :

$$S_t = S_0 \exp((r-\sigma^2/2)t + \sigma W_t)$$

Pour obtenir l'expression analytique du prix de l'option, la principale difficulté est de vérifier que G est une variable aléatoire de loi log-normale sous la probabilité Q, et d'en calculer les paramètres. La suite en découle immédiatement car on peut calculer de façon élémentaire des quantités du type E[max(X-K ;0)] lorsque X est de loi log-normale.

a. Justifier que G correspond bien à une moyenne géométrique.
b. Montrer que :
$$\ln G(T) = \ln S_{t_0} + \frac{1}{2}(r-\sigma^2/2)(T-t_0) + \sigma\frac{1}{T-t_0}\int_{t_0}^{T}(W_t - W_{t_0})dt$$
c. Montrer que $\int_{t_0}^{T}(W_t - W_{t_0})dt$ est une variable aléatoire de loi $N(0, (T-t_0)^3/3)$:

   i. Directement, en écrivant l'intégrale comme une limite de sommes de Riemann.
   ii. Avec le calcul stochastique, en faisant intervenir une intégrale de Wiener.

d. Donner enfin la loi de G. Le prix de l'option s'en déduit, on trouvera une formule dans (Hull, 2004).
e. Considérons maintenant une option asiatique dont le payoff dépend d'une moyenne arithmétique. Expliquer où est la difficulté pour obtenir la loi du payoff. Quelle méthode numérique peut permettre d'obtenir une valeur approchée du prix de l'option. Comment accélérer (de façon drastique !) la vitesse de convergence de la méthode ?

Bibliographie

Doob J.L. (1994), *Measure Theory*, Springer-Verlag.

Karatzas I., Shreve S. E. (1991), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd edition, Springer.

Revuz D., Yor M. (1999), *Continuous Martingales and Brownian Motion*, 3rd edition, Springer.

Roger P. (2004), *Probabilités, statistique et processus stochastiques*, Collection synthex, Pearson Education.

Williams D. (1991), *Probability with Martingales*, Cambridge Mathematical Textbooks.