



# Processus Aléatoires : généralités et exemples

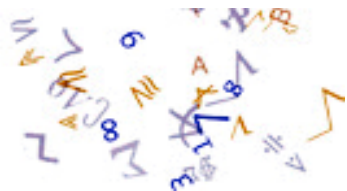
O. Roustant  
Janvier 2008

Master « *Modélisation mathématique et applications* »



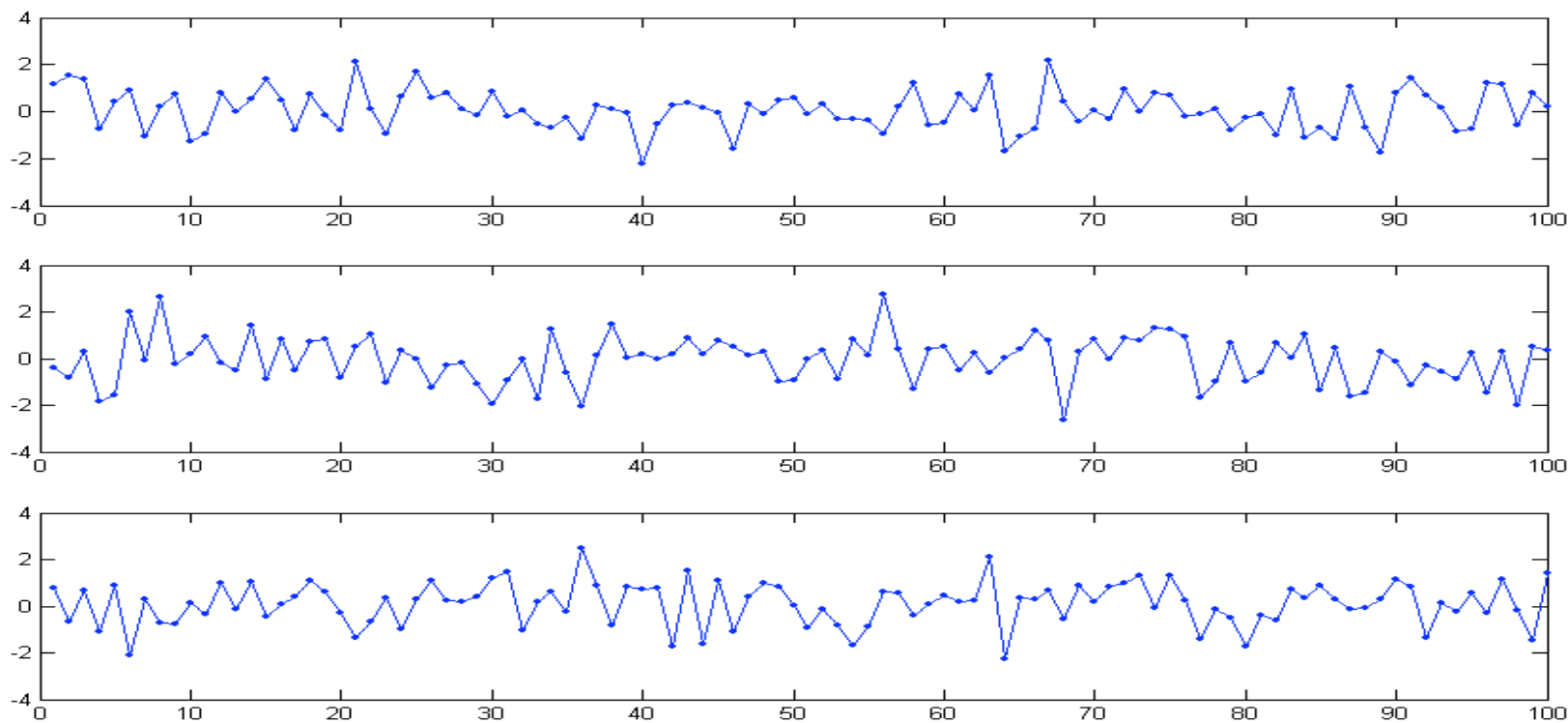
# Définition

- *Processus aléatoire, ou proc. stochastique* : famille de variables aléatoires  $\{Z(x)\}_{x \in X}$
- « L'observable » : *réalisations, trajectoires*
- Un même processus, une infinité de réalisations



# Exemples (1)

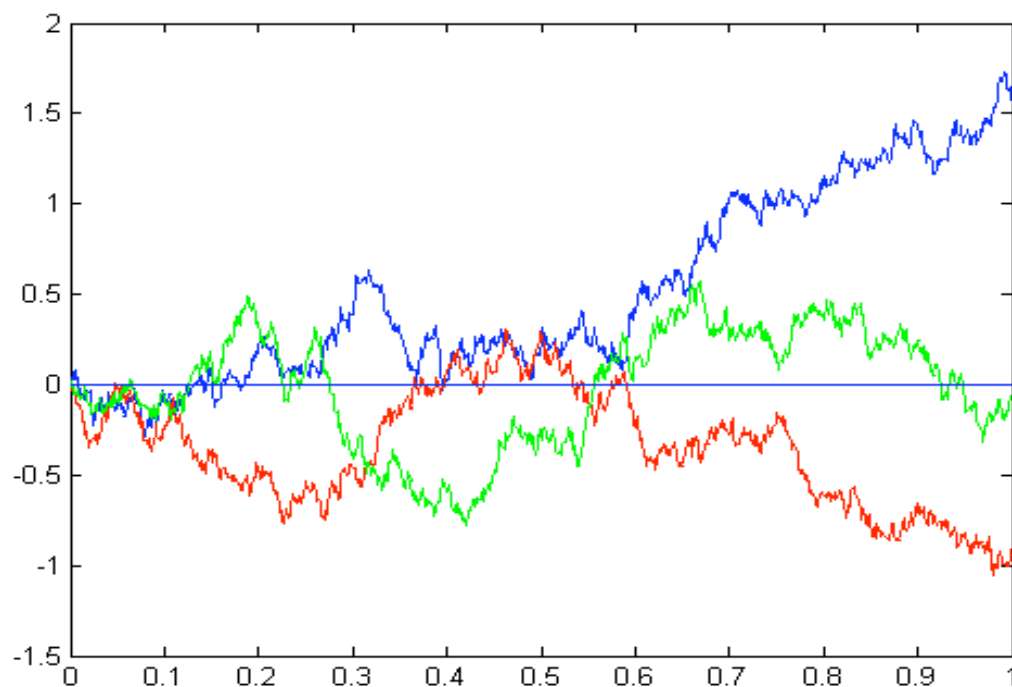
- Quelques réalisations d'un *bruit blanc*





## Exemples (2)

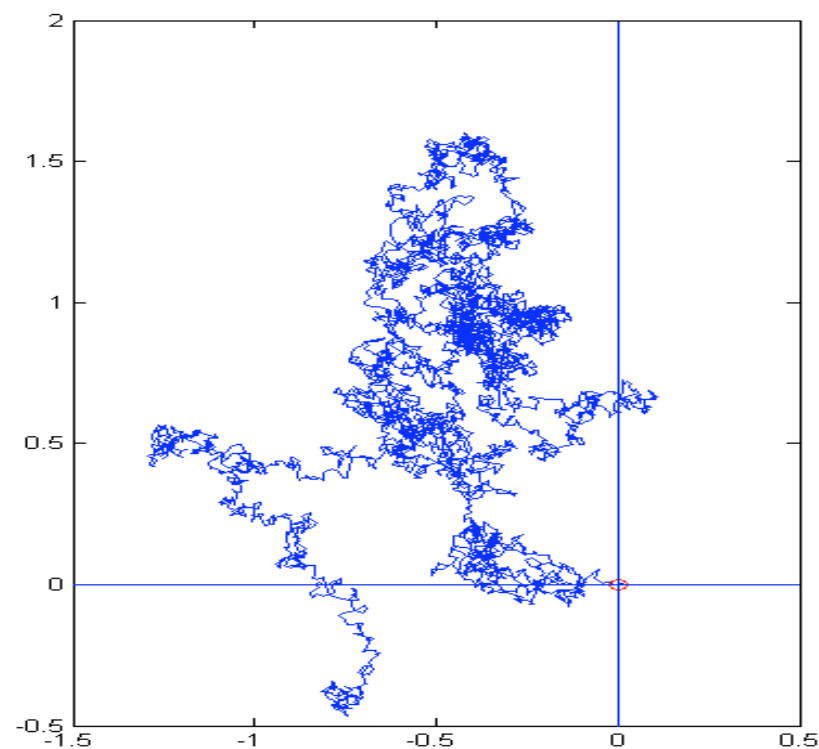
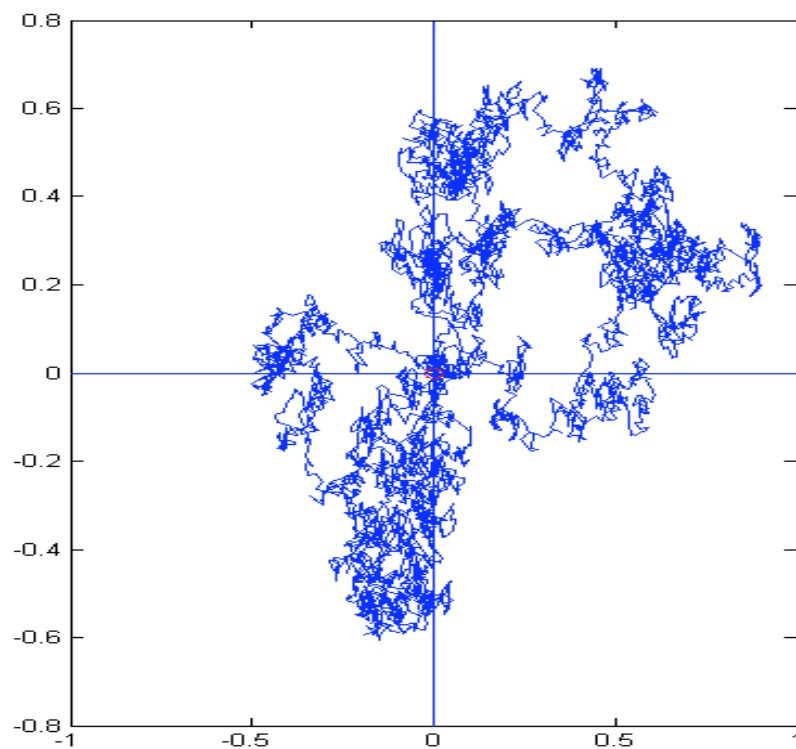
- Quelques réalisations d'un *mouvement brownien* en dimension 1...

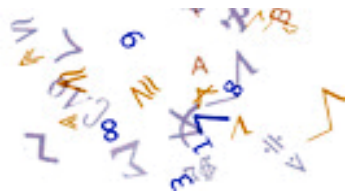




# Exemples (3)

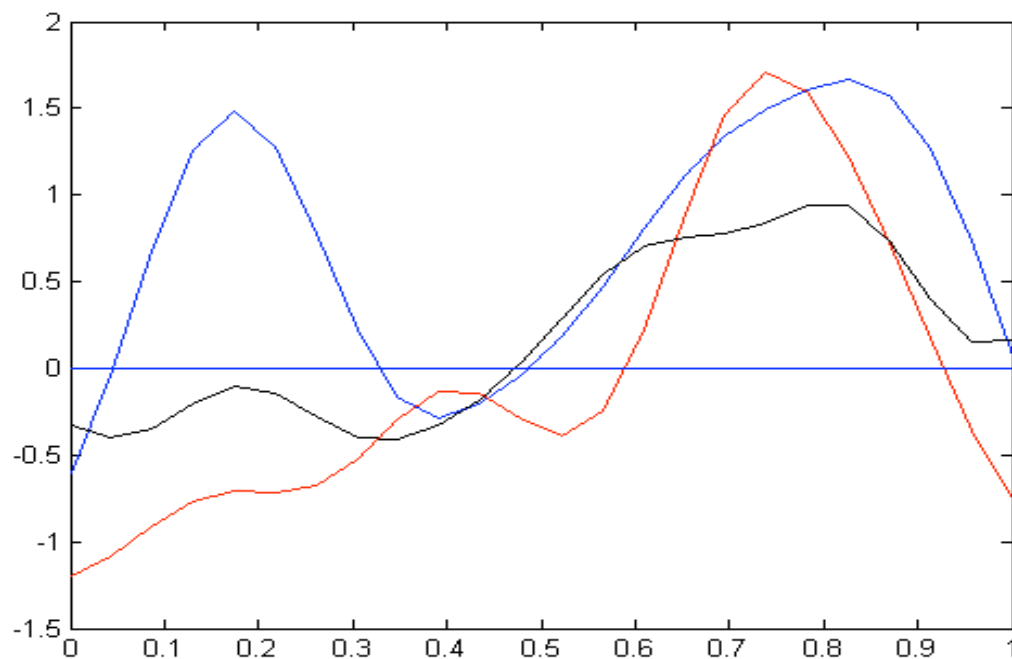
- ... et en dimension 2





# Exemples (4)

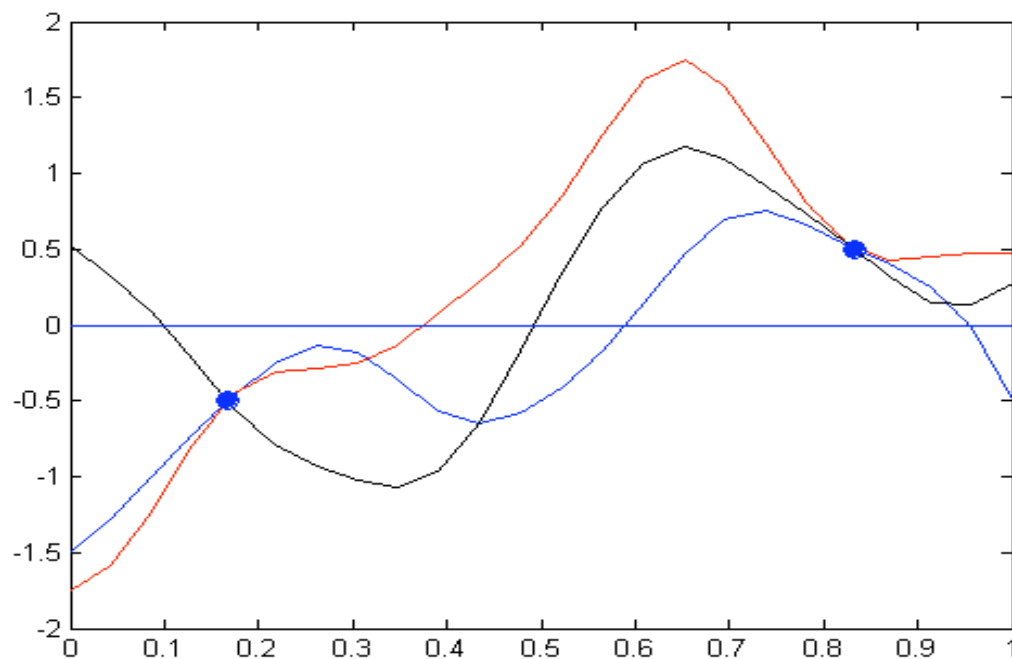
- Quelques réalisations d'un *processus gaussien*, avec trajectoires  $C^\infty$





# Exemples (5)

- Le même, mais *conditionnel* à :  
 $Z(x^{(1)}) = -0.5$  et  $Z(x^{(2)}) = 0.5$





# Processus du second ordre

- Un processus ( $Z(x)$ ) est :
  - *centré* ssi pour tout  $x$ ,  $E(|Z(x)|) < +\infty$  et  $E(Z(x)) = 0$
  - du *second ordre* ssi pour tout  $x$ ,  $E(Z(x)^2) < +\infty$
  - ↳ p.t.  $x, y$ ,  $E(|Z(x)|) < +\infty$  et  $\text{cov}(Z(x), Z(y)) < +\infty$

Rappel  $\text{cov}(X, Y) = E((X - EX)(Y - EY))$  *covariance*  
 $\text{var}(X) = \text{cov}(X, X) = E((X - EX)^2)$  *variance*  
 $s(X) = \text{racine de } \text{var}(X)$  *écart-type*  
 $\text{corr}(X, Y) = \text{cov}(X, Y) / (s(X)s(Y))$  *corrélation*





# Cadre géométrique

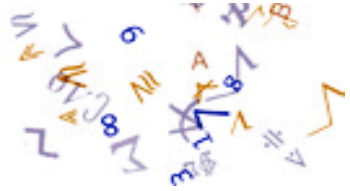
- (*Espace  $L^2$* )
  - L'espace vectoriel des v.a. qui ont un moment d'ordre 2 est un espace de Hilbert pour le produit scalaire  $\langle X, Y \rangle = E(XY)$
  - Si on se restreint aux v.a. centrées,  
 $\langle X, Y \rangle = \text{cov}(X, Y)$



# Stationnarité (1)

Le processus  $(Z(x))$  est :

- *fortement stationnaire* ssi :
  - $(Z(x_1), \dots, Z(x_L))$  et  $(Z(x_1+h), \dots, Z(x_L+h))$  ont la même loi, pour tous  $x_1, \dots, x_L$  et pour tout  $h$
- *faiblement stationnaire* ssi :
  - $E(Z(x))$ ,  $E(Z(x)^2)$  et  $\text{cov}(Z(x), Z(x-h))$  sont finis et ne dépendent pas de  $x$ , pour tout  $x$  et pour tout  $h$



# Stationnarité (2)

- Relations entre les deux notions :
  - Fortement stationnaire  $\Rightarrow$  faiblement stat.
  - La réciproque est fausse en général... mais vraie pour les processus *gaussiens*



# Autocovariance, autocorrélation (1)

Pour un processus stationnaire d'ordre 2, on définit :

- La *fonction d'autocovariance* :
  - $\gamma(h) = \text{cov}(Z(x), Z(x-h))$
- La *fonction d'autocorrélation* :
  - $\rho(h) = \text{corr}(Z(x), Z(x-h))$



# Autocovariance, autocorrélation (2)

- Propriétés :
  - $\rho(h) = \gamma(h) / \gamma(0)$
  - $\gamma(-h) = \gamma(h)$
  - $|\rho(h)| \leq 1$
- Interprétation géométrique :
  - $\rho(h)$  est le cosinus de l'angle formé par  
 $Z(x)-m$  et  $Z(x-h)-m$   
où  $m = E(Z(x)) = E(Z(x-h))$



# Espérance conditionnelle (1)

- Définition dans  $L^2$  (vision géométrique)
- *L'espérance conditionnelle (linéaire)* de  $X$  sachant  $Y$ , est une v.a. notée

$$E(X|Y_1, \dots, Y_k), \text{ (resp. } E_L(X|Y_1, \dots, Y_k))$$

qui est la meilleure approximation de  $X$  comme fonction (resp. comb. linéaire) de  $Y_1, \dots, Y_k$  au sens  $L^2$  :

$$E(X|Y_1, \dots, Y_k) = \operatorname{argmin} (\|X - f(Y_1, \dots, Y_k)\|_{L^2})$$



# Espérance conditionnelle (2)

- Il s'agit donc de projections orthogonales.  
Pour cette raison, on appelle souvent :
  - $E_L(X|Y)$  *régression linéaire* de X sur Y
  - $E(X|Y)$  *régression (non linéaire)* de X sur Y
- Cas particulier remarquable : si  $(X, Y)$  est un *vecteur gaussien*, les régressions linéaires et non linéaires coïncident



# Espérance conditionnelle (3)

- Quelques propriétés
  - Linéarité :  $E(aX+b|Y) = aE(X|Y) + b$
  - $EX = E(E(X|Y))$
  - $E(f(Y) | Y) = f(Y)$
  - $E(Xf(Y) | Y) = f(Y) E(X|Y)$
  - Si Z est relative à une information contenue dans Y,  $E(X | Z) = E(E(X | Y) | Z)$
  - Si X et Y sont indépendants,  $E(X|Y) = E(X)$
  - ...





# Variance conditionnelle

- Définition :

$$\text{var}[f(X) | Y_1, \dots, Y_k] = E([X - E(X | Y_1, \dots, Y_k)]^2 | Y_1, \dots, Y_k)$$

- Propriété (Pythagore !):

$$\begin{aligned} \text{var}(f(X)) &= E(\text{var}[f(X) | Y_1, \dots, Y_k]) \\ &\quad + \text{var}(E(f(X) | Y_1, \dots, Y_k)) \end{aligned}$$



# Loi conditionnelle

- On admet qu'il existe une probabilité  $P$  telle que pour toute fonction  $f$ ,

$$E[f(X) | Y_1, \dots, Y_k] = \int f(x) dP(x)$$

$P$  est appelé *loi conditionnelle* de  $X$  sachant  $Y_1, \dots, Y_k$ , et notée  $d\mu_{X|Y_1, \dots, Y_k}$

- En particulier,
  - $E[X | Y_1, \dots, Y_k] = \int x d\mu_{X|Y_1, \dots, Y_k}(x)$



# Processus gaussien (1)

- Rappel. La densité de la *loi normale d-dimensionnelle* est donnée par :

$$f_{\mu, \Sigma}(x_1, \dots, x_d) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(X - \mu)' \Sigma^{-1}(X - \mu)\right)$$

avec

- $X = (x_1, \dots, x_d)'$ ,
- $\mu$  un vecteur  $d \times 1$ , s'interprétant comme la moyenne
- $\Sigma$  une matrice symétrique (définie) positive, s'interprétant comme la matrice de covariance



# Processus gaussien (2)

- En fait, la densité est définie uniquement en fonction des 2 premiers moments, comme en dim. 1:

- *Dans le cas d'indépendance,*

$$f_{(X_1, \dots, X_d)}(x_1, \dots, x_d) = f_{(X_1)}(x_1) * \dots * f_{(X_d)}(x_d)$$

- *Dans le cas général,* on exige que la loi d'un vecteur gaussien centré et réduit

$$(\Sigma^{1/2})^{-1}(X - \mu)$$

soit la même que dans le cas de l'indépendance

*Conséquence immédiate : orthogonalité  $\Rightarrow$  indépendance*



# Processus gaussien (3)

- Un processus  $(Z(x))$  est *gaussien* ssi
  - pour tous  $x_1, \dots, x_n$ , la loi du vecteur  $(Z(x_1), \dots, Z(x_n))$  est gaussienne

ou, de façon équivalente, ssi :

- pour tous  $x_1, \dots, x_n$ , la loi de toute combinaison linéaire de  $(Z(x_1), \dots, Z(x_n))$  est gaussienne



# Processus gaussien (4)

- Pour un processus gaussien:
  - Faiblement stationnaire  $\Rightarrow$  stationnaire
  - Orthogonalité  $\Rightarrow$  indépendance
  - E cond. Linéaire = E conditionnelle
  - Les lois conditionnelles sont gaussiennes :

Si  $X = [X_1; X_2]$  est gaussien, de moyenne  $[m_1; m_2]$ , et de matrice de covariance  $S = [S_{11} \ S_{12}; S_{21} \ S_{22}]$ , alors  $X_1|X_2$  est gaussien, avec :

$$E(X_1|X_2) = m_1 + S_{12}(S_{22})^{-1}(X_2 - m_2)$$

$$\text{Cov}(X_1|X_2) = S_{11} - S_{12}(S_{22})^{-1}S_{21}$$



# Processus gaussien (5)

- Comment simuler un processus gaussien ?
- On utilise la *décomposition de Choleski* : toute matrice symétrique définie positive admet la décomposition (unique)

$$S = T'^*T$$

avec T matrice triangulaire supérieure

- Puis on remarque que si E est de loi normale  $N(0, I_n)$ , alors  $T'.E$  est de loi  $N(0, S)$



# Mouvement brownien (1)

- Définition 1 : on appelle *mouvement brownien*  $(B_t)$  tout processus vérifiant :
  - $(B_t)$  est un *processus à accroissements indépendants et stationnaires (PAIS)* : pour tout instant  $t$  et tout horizon  $h$ , l'accroissement  $(B_{t+h}-B_t)$  est indépendant des variables  $B_s$ ,  $s \leq t$ , et de loi indépendante de  $t$
  - Les trajectoires sont continues





# Mouvement brownien (2)

- Définition 2 : on appelle *mouvement brownien standard*  $(W_t)$ , ou *processus de Wiener*, un processus défini par :
  - $W_0 = 0$
  - $(W_t)$  est un processus gaussien
  - $(W_t)$  est centré, et  $\text{cov}(W_s, W_t) = \min(s, t)$
  - Les trajectoires sont continues



# Mouvement brownien (3)

- Il est facile de voir que tout processus de Wiener est un mouvement brownien
- Réciproquement (plus difficile), si  $(B_t)$  est un mouvement brownien, alors il existe  $a$ ,  $b$  et  $\sigma > 0$ , tels que

$$B_t = a + bt + \sigma W_t$$

où  $W_t$  est un processus de Wiener



# Mouvement brownien (4)

- Simulation : en discret, il s'agit d'une *marche au hasard*

$$W_{nh} = W_0 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$$

- Donc simulation par intégration d'un bruit blanc gaussien



# Mouvement brownien (5)

- *Mouvement brownien multi-dimensionnel* : il s'agit d'un processus dont les coordonnées sont des mouvements browniens (standard) indépendants

$$\mathbf{W}_t = (W_{1,t}, \dots, W_{d,t})$$



# Pont brownien (1)

- On appelle *pont brownien* le processus  $(P_t)$  défini sur  $[0,1]$  par :

$$P_t = W_t - t.W_1$$

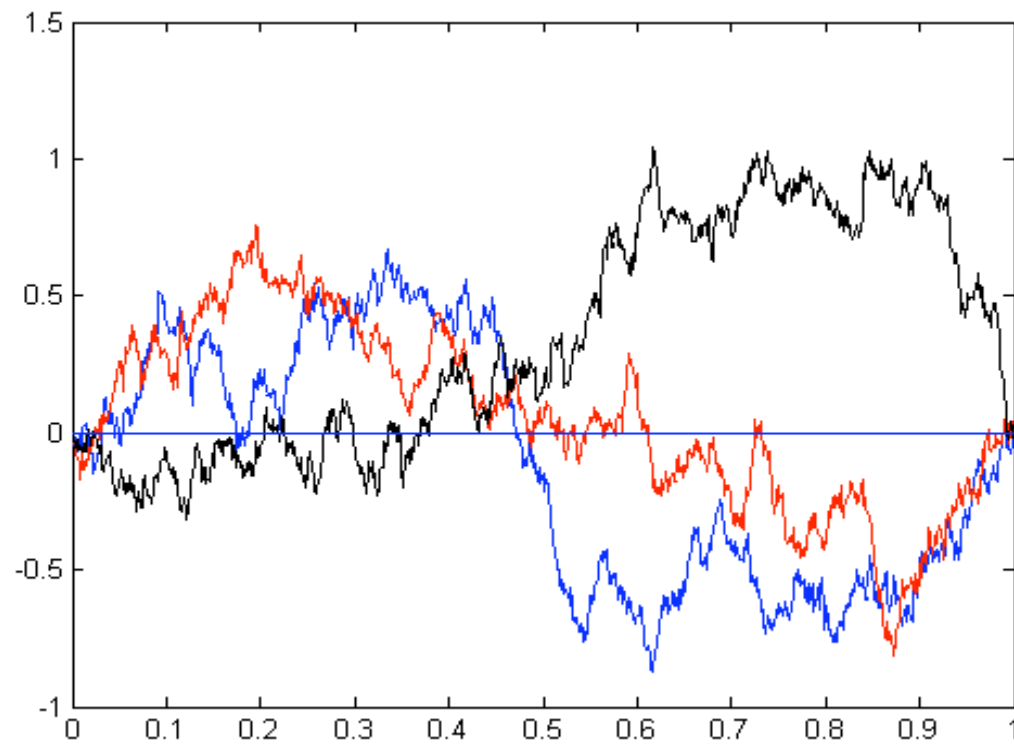
où  $(W_t)$  est un mouvement brownien standard.

- Le processus est contraint de passer par 0 aux bords  $\Rightarrow$  interpolation



# Pont brownien (2)

- Quelques réalisations :





# Pont brownien (3)

- Quelques propriétés
  - $(P_t)$  est un processus gaussien
  - $P_t$  est de loi  $N(0, t(1-t))$
  - $\text{cov}(P_s, P_t) = \min(s, t) - st$



# Modèle de krigage (1)

- $y(x) = \mu + Z(x)$

$\mu$  : moyenne de  $y(x)$ , constante

$Z(x)$  : processus gaussien stationnaire centré,  
de matrice de covariance  $\sigma^2 R$ , avec

$R(x, x+h)$  « décroissant » /  $h$

Exemples :

- $R(x, y) = \exp(-[\theta_1 |x_1 - y_1|^{p(1)} + \dots + \theta_d |x_d - y_d|^{p(d)}])$   
où  $p(1), \dots, p(d) \in ]0, 2]$
- Si  $p(i) = 2$ , les réalisations sont de classe  $C^\infty$





# Modèle de krigeage (2)

- Simulation : il s'agit d'un processus gaussien particulier...
- Simulation du processus conditionnel : c'est encore un processus gaussien



# Modèle de krigage (3)

- Prédiction : dans le cas où  $\mu$ ,  $\sigma$  et  $R$  sont connus,

$$\begin{aligned} Y_{\text{pred}}(x) &= E[y(x)|y(x^{(1)}), \dots, y(x^{(n)})] \\ &= \mu + r'R^{-1}(y(x^{(1)}) - \mu, \dots, y(x^{(n)}) - \mu)' \end{aligned}$$

avec  $r = (R(x, x^{(1)}), \dots, R(x, x^{(n)}))'$

- En pratique, on remplace  $\mu$ ,  $\sigma$  et  $R$  par leurs estimations (à suivre...)



# Modèle de krigeage (4)

- Exemple en dimension 1, avec  $\theta = 30$

